1.5.2 Mechanická práce II

Předpoklady: 1501

Př. 1: Jakou minimální práci vykonáš při přemístění bedny o hmotnosti 50 kg po podlaze o vzdálenost 5 m. Příklad spočítej dvakrát, jednou zanedbej třecí sílu mezi bednou a podlahou, podruhé počítej s koeficientem tření $f = 0,5$.

$m = 50\,\mathrm{kg}$ $\quad s = 5\,\mathrm{m}$ $\quad f = 0,5$ $\quad W_1 = ?$ $\quad W_2 = ?$

Použijeme klasický vzorec pro práci $W = Fs$.
V prvním případě (při zanedbání třecí síly) je síla nutná k přemístění bedny nulová (když není tření, stačí na přemístění libovolně malá síla).
Ve druhém případě, musíme působit silou, která je stejně velká jako třecí síla, která brání v přesunu krabice.

a) $W_1 = Fs = 0 \cdot 5\,\mathrm{J} = 0\,\mathrm{J}$

b) $W_2 = Fs$ $\quad$ dosadíme: $F = F_t = Nf = mgf$

$W_2 = Fs = mgfs$

$W_2 = Fs = mgfs = 50 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 5\,\mathrm{J} = 1250\,\mathrm{J}$

Pokud bychom zanedbali působení třecí síly, k přesunutí krabice by nebylo nutné vykonat žádnou práci. Pokud budeme třecí sílu uvažovat, k přesunutí krabice by bylo třeba vykonat práci 1250 J.

Pedagogická poznámka: Značná část studentů se v bodě a) nedokáže smířit s tím, že by za sílu dosazovala nulu a tak za sílu dosadí většinou kolmou tlakovou sílu od podložky. Tato chyba je dobrým odrazovým můstkem k následující diskusi. Prvním čím se tuto chybu snažím vyvracet je porovnání výsledků obou bodů, kde při špatném postupu vychází v bodě a) větší práce než v bodě b), což je zjevný nesmysl.

Ještě se zastavíme u předchozího příkladu. Na bednu nepůsobí pouze naše síla, kterou ji přesunujeme, působí na ni i další tři síly: gravitační, síla podložky a tření. Konají i tyto síly při posunování bedny práci? Platí pro ně vzorec $W = Fs$?

- Gravitační síla a síla podložky práci zřejmě nekonají. Působí i na rovnoměrně se kutálející kuličku, při jejímž pohybu se práce nekoná.
- Třecí síla práci zřejmě koná. Kdyby bedna už jela, tření by ji zastavilo, čímž by změnilo stav krabice a vykonalo by práci. Tento druh práce se trochu liší od práce, kterou vykonává člověk při posunutí bedny. Člověk se snažil změnu (přesun bedny) uskutečnit, zatímco tření změně brání.

$\Rightarrow$ Ani pro jednu ze zmiňovaných sil vzorec $W = Fs$ neplatí $\Rightarrow$ něco jsme zapomněli.

Zatím jsme nijak nezohlednili fakt, že síla i posunutí jsou veličiny vektorové. Kromě velikosti mají i směr $\Rightarrow$ doplníme vzorec o úhel α (nebo jeho funkci), který oba vektory svírají (úhel popisuje vzájemnou polohu směrů dvou vektorů).
Jakou z goniometrických funkcí použijeme?
$\cos\alpha$, protože pro $\alpha = 90°$ (síla je kolmá na posunutí) se práce nekoná (a platí $\cos 90° = 0$).

Mechanickou práci koná těleso při přesunu jiného tělesa po dráze *s* za působení síly *F*.

Její velikost vyjadřuje vztah $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, kde α je úhel, který svírá síla se směrem posunutí.

Pokud je působící síla rovnoběžná se směrem posunutí, platí $\cos\alpha = 1$ a člen $\cos\alpha$ můžeme ve vzorci vynechat.

Př. 2: Při přemístění bedny do vzdálenosti 30 m jsi vykonal práci 2100 J. Jakou silou jsi musel těleso tahat, jestliže síla, kterou jsi bednu táhl:
a) měla směr posunutí tělesa,
b) svírala s posunutím tělesa úhel o velikosti $\alpha = 30°$?

$s = 3\,\text{m}$ $W = 2100\,\text{J}$ $\alpha_1 = 0°$ $\alpha_2 = 30°$ $F_1 = ?$ $F_2 = ?$

V obou případech stačí vyjádřit ze vzorce sílu a dosadit do vzniklého vztahu.

$W = Fs\cos\alpha$

$F = \frac{W}{s\cos\alpha}$

a) $F_1 = \frac{W}{s\cos\alpha_1} = \frac{2100}{30 \cdot \cos 0°}\,\text{N} = 70\,\text{N}$

b) $F_2 = \frac{W}{s\cos\alpha_2} = \frac{2100}{30 \cdot \cos 30°}\,\text{N} = 80{,}8\,\text{N}$

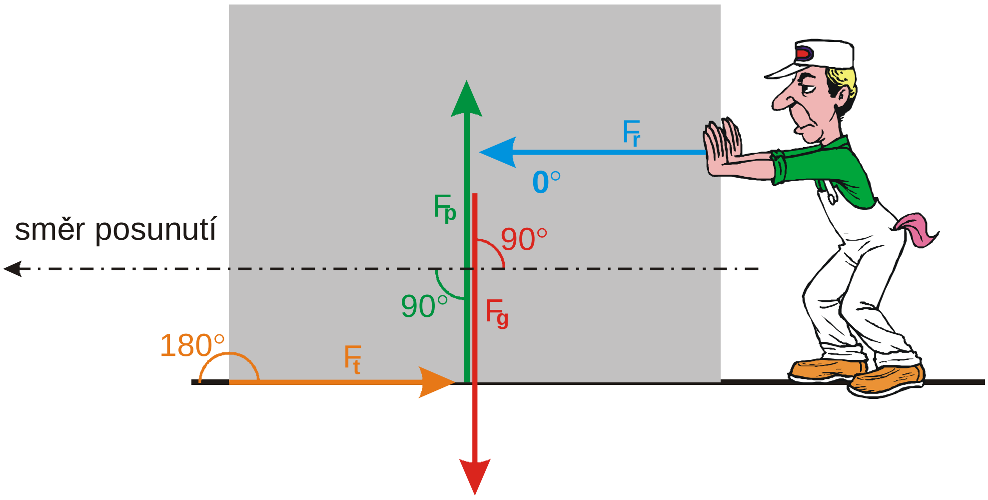
Při přesouvání bedny jsme museli tahat silou 70 N (v případě síly rovnoběžné se směrem posunutí) nebo 81 N (v případě síly svírající s posunutím úhel $\alpha = 30°$).

Př. 3: Letí na Tebe míč a Ty ho chytíš. Jaké je znaménko práce, kterou konal během chytání míč? Jaké je znaménko práce, kterou jsi konal Ty?

Během chytání se míč pohybuje ještě směrem k nám. $\Rightarrow$

- Míč působí silou směrem k nám (ve směru svého pohybu) $\Rightarrow$ práce konaná míčem je kladná.
- My působíme na míč směrem od nás (proti pohybu míče) $\Rightarrow$ práce konaná námi je záporná.

Př. 4: Stěhovák tlačí po vodorovné rovině bednu. Na bednu působí tyto síly: stěhovák silou F_r ve směru pohybu, třecí síla F_t proti směru pohybu, gravitační síla F_g svisle dolů a tlaková síla od podložky F_p svisle nahoru. Jaké je znaménko práce, kterou koná každá z těchto sil?



K vyřešení příkladu použijeme obrázek. Práce se počítá pomocí vzorce $W = Fs\cos\alpha$ znaménko práce tedy závisí na velikosti úhlu α.

a) Síla rukou F_r – síla působí ve směru pohybu bedny $\Rightarrow$ $\alpha = 0°$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = 1$ $\Rightarrow$ práce konaná stěhovákem má kladné znaménko (je to rozumné, stěhovák způsobuje pohyb, změnu a koná tedy kladnou práci).

b) Třecí síla F_t – síla působí proti směru pohybu bedny $\Rightarrow$ $\alpha = 180°$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = -1$ $\Rightarrow$ práce konaná třecí silou má záporné znaménko (je to rozumné, třecí síla se snaží zabránit změně, a tedy koná zápornou práci).

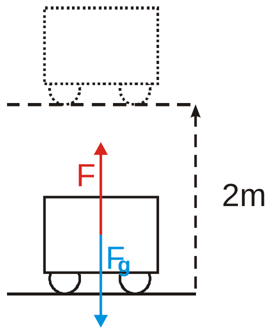
c) Gravitační síla F_g – síla působí kolmo na směr pohybu bedny $\Rightarrow$ $\alpha = 90°$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = 0$ $\Rightarrow$ práce konaná gravitační silou je nulová.

d) Síla podložky F_p – síla působí kolmo na směr pohybu bedny $\Rightarrow$ $\alpha = 90°$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = 0$ $\Rightarrow$ práce konaná silou podložky je nulová.

Dodatek: Ani vzorec $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$ není nejideálnějším vzorcem pro výpočet práce. Na vysokoškolské úrovni se používá vzorec $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$, který pomocí skalárního násobení (nám zatím neznámá operace s vektory) umožňuje určit vykonanou práci přímo ze složek obou vektorů. Všechny vzorce, které jsme odvodili, jsou jenom důsledky vlastností této matematické operace.

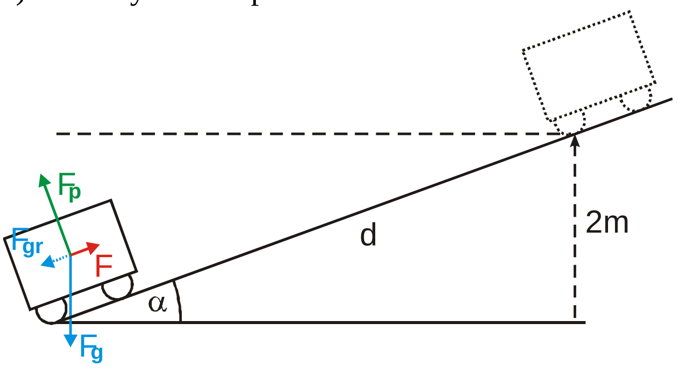
Př. 5: Vozík s nákladem o celkové hmotnosti 150 kg je třeba zvednout do výšky 2 m. Urči práci, kterou přitom vykonáme pokud:
a) vozík zvedneme kolmo vzhůru,
b) vozík vyvezeme po nakloněné rovině o úhlu $20°$ a tření zanedbáme,
c) vozík vyvezeme po nakloněné rovině o úhlu $20°$ a budeme uvažovat koeficient tření $f = 0{,}05$.
Ve všech bodech očekávej, že působíme silou ve směru posunutí.

a) vozík zvedneme kolmo vzhůru



Směr síly je rovnoběžný se směrem posunutí.
$W = F \cdot s = F_g h = mgh = 150 \cdot 10 \cdot 2\,\mathrm{J} = 3000\,\mathrm{J}$

b) vozík vyvezeme po nakloněné rovině o úhlu $20°$ a tření zanedbáme



Směr síly je rovnoběžný se směrem posunutí.

$W = Fs$

Síla, kterou musíme táhnout vozík nahoru, musí vyrovnat rovnoběžnou složku gravitační síly.

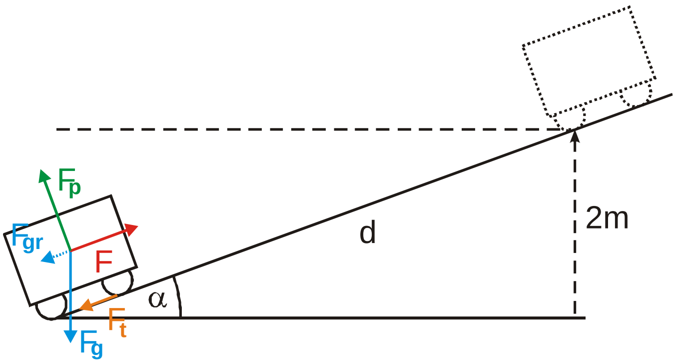
$F = F_{gr} = F_g \sin\alpha = mg\sin\alpha = 150 \cdot 10 \cdot \sin 20°\ \mathrm{N} = 513\,\mathrm{N}$

Táhneme vozík po celé délce nakloněné roviny: $\sin\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 20°}\mathrm{m} = 5{,}85\,\mathrm{m}$

$W = Fs = 513 \cdot 5{,}85\,\mathrm{J} = 3000\,\mathrm{J}$

Obecně: $W = Fs = mg\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh = 150 \cdot 10 \cdot 2\ \mathrm{J} = 3000\,\mathrm{J}$

c) vozík vyvezeme po nakloněné rovině o úhlu $20°$ a budeme uvažovat koeficient tření $f = 0{,}05$.



Směr síly je rovnoběžný se směrem posunutí.

$W = Fs$

Síla, kterou musíme táhnout vozík nahoru, musí vyrovnat rovnoběžnou složku gravitační síly a tření.

$F = F_{gr} + F_t = F_g \sin\alpha + F_{gk} f = mg\sin\alpha + mg\cos\alpha\, f =$

$= 150 \cdot 10 \cdot \sin 20° + 150 \cdot 10 \cdot \cos 20° \cdot 0{,}05\ \mathrm{N} = 584\,\mathrm{N}$

Táhneme vozík po celé délce nakloněné roviny: $\sin\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 20°}\mathrm{m} = 5{,}85\,\mathrm{m}$

$W = Fs = 584 \cdot 5{,}85\,\mathrm{J} = 3413\,\mathrm{J}$

Obecně:
$$W = Fs = \left(mg\sin\alpha + mg\cos\alpha \cdot f\right)\frac{h}{\sin\alpha} = mg\sin\alpha\frac{h}{\sin\alpha} + mg\cos\alpha \cdot f\,\frac{h}{\sin\alpha} =$$
$$= mgh + mgh\frac{\cos\alpha \cdot f}{\sin\alpha} = mgh\left(1 + f\,\mathrm{cotg}\,\alpha\right) = 150 \cdot 10 \cdot 2\left(1 + 0{,}05\,\mathrm{cotg}\,20°\right)\mathrm{J} = 3412\,\mathrm{J}$$

Pedagogická poznámka: Je takřka neuvěřitelné, jaké procento žáků se v bodech b) a c) vůbec nezamyslí nad zadáním úlohy, chopí se nabídnutého úhlu a tupě dosadí do vztahu $W = Fs\cos\alpha$. Kvůli tomu, je tento příklad velmi důležitý. Jeho druhou výhodou je nutnost postupného výpočtu, kdy si žáci napíšou vztah $W = Fs$, a pak zvlášť řeší velikosti síly a dráhy.

Př. 6: Zopakuj předchozí výpočty obecně pro hmotnost *m*, výšku *h*, úhel α a koeficient tření *f*. Závisí práce, kterou vykonáme při zanedbání tření, na úhlu nakloněné roviny? Závisí práce, kterou vykonáme, na úhlu nakloněné roviny, když tření uvažujeme?

Obecný vztah jsme získali už při řešení předchozího příkladu.

$$W = Fs = \left(mg\sin\alpha + mg\cos\alpha\cdot f\right)\frac{h}{\sin\alpha} = mgh + mgh\frac{\cos\alpha\cdot f}{\sin\alpha} = mgh\left(1 + f\operatorname{cotg}\alpha\right)$$

Vztah popisuje všechny řešené případy:

- zvedáme kolmo vzhůru ($\alpha = 90°$) $\Rightarrow$ $\operatorname{cotg}\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $W = mgh\left(1 + f\operatorname{cotg}90°\right) = mgh\left(1+0\right) = mgh$,
- zvedáme po nakloněné rovině, tření zanedbáváme ($f = 0$) $\Rightarrow$ $W = mgh\left(1 + f\operatorname{cotg}\alpha\right) = mgh\left(1 + 0\operatorname{cotg}\alpha\right) = mgh$ $\Rightarrow$ nezáleží na úhlu nakloněné roviny, práce, kterou vykonáme, je stejná, jako když vozík zvedneme svisle vzhůru,
- zvedáme po nakloněné rovině, tření uvažujeme $\Rightarrow$ $W = mgh\left(1 + f\operatorname{cotg}\alpha\right)$ $\Rightarrow$ záleží na úhlu nakloněné roviny, práce, kterou vykonáme, je tím větší, čím menší je úhel nakloněné roviny.

Shrnutí: Pokud směr působící síly není rovnoběžný se směrem posunutí, musíme při výpočtu práce zohlednit úhel, který spolu tyto směry svírají - $W = Fs\cos\alpha$.